

工学への応用からみた多変数関数の微分積分教材

高木 悟¹⁾, 羽田野 袈裟義²⁾

1) 早稲田大学 グローバルエデュケーションセンター

2) 九州産業大学 建築都市工学部 都市デザイン工学科

satoru@waseda.jp, hadano@ip.kyusan-u.ac.jp

Educational Materials on Multivariable Calculus as Seen from the Application to Engineering

Satoru Takagi¹⁾, Kesayoshi Hadano²⁾

1) Global Education Center, Waseda Univ.

2) Department of Civil and Urban Design Engineering,
Faculty of Architecture and Civil Engineering, Kyushu Sangyo Univ.

概要

多変数関数の微分積分については、すでに非常に多くの本が存在するが、我々は特に工学で現れる現象から多変数関数の微分積分を解説する教材を作成中である。CBT (Computer Based Training) による予習復習教材の開発も含め、まだ試行錯誤しているところではあるが、まずはこの取り組みについて紹介したい。

1 はじめに

微分積分学の本はすでに非常に多く存在しているが、特に多変数関数の微分積分学について、工学などの応用から微分積分の概念を解説している本はあまりない。また、工学の専門書においても、多変数関数の微分積分を丁寧に解説している本もあまりない。そこで、数学科出身で数学を専門としない学生を対象に微分積分の講義を担当する第一著者と、水理学が専門で長年工学系の学生を指導している第二著者とで、工学上の応用で遭遇する多変数関数の微分積分の代表的な事例を紹介しながら丁寧に微分積分を解説する教材を作成することにした。数学を専門としない学生を対象に微分積分学を講義する場合、ただ単に数学的知識を説明して演習しても、学生にはその有用性がわからない。そのため、微分積分がさまざまな現象でいかなる形で現れ、解析にいかに関与しているかを教員が説明する。そうすることで、学生の学習の動機付けになるだけでなく、学生が将来専門分野の学習において数学的視点で思考し、解析する力を養うことにつながる。この取組はそれを手助けするための教材を作成することである。また、講義だけではなく、CBT (Computer Based Training) による予習復習の教材をも準備して、確実な理解を達成する環境を整えたい。

2 教材の一例

ここでは、現在作成している教材の一例を紹介する。図は発表当日にポスターにて紹介することとし、ここでは文章でのみ説明する。

2.1 多変数関数

まずは、多変数関数自体に馴染みがないと思われるので、今まで学習してきた一変数関数と比較するような例を出す。例えば、金を含むある1つの合金の金の含有量はその合金の重さを独立変数とする一変数関数で表され、その係数が含有率となる。一方、複数の合金の合計の金の含有量は、各合金の重さを独立変数とし金の含有率を係数とする1次多項式が多変数関数で表すことができる。この箇所の詳細については、[1]にて報告している。

この単元の CBT としては、回転放物面など空間図形の面の高さの表現式という比較的簡単な二変数関数を用いて、数表の入力と各平面で切った断面図を選択する問題を考えている。

2.2 偏微分係数

多変数関数に馴染んだ後は、各方向における増加率を調べる。例えば、一定幅の直線状の川に沿う堤防の法面(斜面)を、流下方向と平行な鉛直面および流下方向と垂直な鉛直面という2つの平面で切った断面で考えると、その切り口の線の傾きからそれぞれの方向の偏微分係数が得られる。

他にも、津波時の避難行動に関する問題として、東西方向および南北方向の地表面の勾配がそれぞれそれらの方向の偏微分係数と一致する。また、これら偏微分係数をベクトルの各方向の成分としてみたものが勾配ベクトルになることを説明し、その後の応用例をより理解しやすいものにする。

2.3 全微分

ある水域の水温が、時間と場所の関数で表されるとき、時間と場所の座標値がそれぞれ微増したときの水温の増加量が全微分となる。場所を固定した場合や時間を固定した場合などを考えることで、より明確なイメージが得られやすくなる。

2.4 合成関数の微分

一次元の水面波の問題を考えるが、そこから一階の波動方程式、二階の波動方程式を導く過程についても解説する。

2.5 面積積分

水面下の傾斜面に作用する静水圧の問題を応用例として考えることができる。断面一次モーメント、断面二次モーメント、座標軸を平行移動した場合のそれらの値などは、数学的に重要な概念であり、応用でも有力な計算ツールである。

2.6 体積積分

空間における絶対湿度を体積積分することにより、その領域の総水量を求めることができる。

2.7 ベクトル解析

ベクトル場の発散としては、流れ学としてまず空間内の1点における速度ベクトルの各方向成分が、各軸に垂直な平面を通過する流体の体積を、当該平面の単位面積、単位時間あたりに換算したものと一致していることを、図を用いて示す。その上で湧き出し、吸い込み、圧縮膨張のいずれも生じないときは、この点を取り囲む任意の固定領域の表面を単位時間に出る全流体体積と入る全流体体積が常に一致することを紹介する。

また、ベクトル場の回転については、空間内のある点における流速ベクトルの単位時間あたり回転として渦度を解釈することができ、成分ごとに計算を進めることによってイメージをさせる。

3 今後の課題

前節のように、いくつもの単元において特に工学上の応用例を用いて多変数関数の微分積分（ベクトル解析を含む）を解説することができる。あとは、それをどのように教材に組み込み、いかに読者（受講生）に理解してもらえるような表現と

するかがポイントであり、現在試行錯誤しているところでもある。また、内容が工学上の応用例が多いが、文系の学生も含め、興味のある学生にも読み進めてもらえるような方策を考えたい。

あわせて、この教材に関連した CBT 教材の開発も同時に取り組んでおり、対面の講義だけではなく、自宅などで予習復習をして理解を深める工夫もしている。セメスター科目としてどのようなスケジュールで授業を進めるか、また最近増えつつあるクォーター科目の場合でも対応できるように柔軟な教材としたい。ゆくゆくは、関連するワークシートも用意し、これらの教材を一式で提供できるようにしたい。

4 謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP16H03065 の助成を受けたものである。また、この教材開発にあたって、レビューをしてくださった高水準のための数学教育研究会メンバーに心からお礼申し上げる。

参考文献

- [1] Satoru Takagi, Kesayoshi Hadano, Educational materials on basic partial derivative which appeal to intuition, Proceedings of the International Workshop on Mathematical Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy, pp.73-76, 2018.
- [2] Satoru Takagi, Sei-ichi Yamaguchi, Ryuichi Mizumachi, Designing 1st year calculus courses, Proceedings of the International Workshop on Mathematical Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy, pp.47-52, 2018.
- [3] C. Ray Wylie, Louis C. Barrett, Advanced Engineering Mathematics 6th Edition, McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [4] Michael R. Lindeburg, FE Review Manual Third Edition, Revised, Professional Publications, Inc., 2014.